... written by Diana Norris **May 2003**

Herleitung des Kreisinhaltes und Kreisumfangs
Arbeiten mit dieser Formel

1. Keisfläche und Kreisinhalt

Die Kreisfläche kann mit einer einfachen Formel berechnet werden: A= pi * r^2
Es war eine historische Leistung, die Kreiszahl pi "genau zu bestimmen. Dem Schüler sollte im Unterricht wenigstens eine Methode vermittelt werden, wie man sie erreichen kann.

Methode: Annäherung der Kreisfäche von innen und außen durch Rechtecke.

Der Einfachheit halber verwendet man nur einen Viertelkreis. Seinen Radius teilt man in n gleich große Teile auf und kann *in* den Kreis (n-1) Rechtecke einzeichnen, und kann n Rechtecke ***über*** den Kreis legen, dass er ganz abgedeckt wird. Diese Methode soll auf drei Arten vorgeführt werden.

1. Beispiel: n=4

An diesem 1. Beispiel kann man erkennen, wie man den Viertelkreis mir 4 Rechtecken, die bis zum Kreis reichen, ausfüllen kann. Das 4. Rechteck ist allerdings zur Strecke entarntet, es hat nämlich die Höhe 0! .
Das 2. Beispiel zeigt, dass man so den Viertelkreis mit vier Rechtecken überdecken kann. Dabei sollte man erkennen, dass die drei inneren Rechtecke mit drei der vier äußeren Rechtecke übereinstimmen.

Bei einer Zerlegung des Radius **in 4 Teilen** erhält jedes Rechteck die Breite b= r/4
Die Fläche der drei inneren Rechtecke heißen **Untersumme U.vier.**
Die Höhen der Rechtecke berechnet man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras.

Untersumme und Obersumme:

Eine Viertelkreisfläche (B.s.) liegt zwischen der Ober- und Untersumme:
$0{,}6239 \cdot r^2 < A.vk < 0{,}8739$

Man multipliziert diese Ungleichung mit 4 und erhält eine erste Abschätzung für die Kreisfläche:
$2{,}4956 \cdot r^2 < A.kr < 3{,}4956 \cdot r^2$
den genauen Zahlenfaktor für r^2 nennt man die Zahl Pi.
Für die Kreisfläche gilt somit

$$A.kr = Pi \cdot r^2$$

und wir wissen jetzt über Pi:

$$2{,}4956 < Pi < 3{,}4956.$$

Der Unterschied zwischen Obersumme und Untersumme ist also gerade Ao .

Diese Fläche hat den Inhalt $Ao= r/n*r= r^2/n$
Für $r= 10$ ist beispielsweise $Ao = 100/n$

Hat man eine Zerlegung in 10 Teilintervalle, ergibt dies $Ao= 10$
Bei 100 teilintervallen: $Ao= 1$, bei 1000 Teilintervallen 0,1 usw.
Man erkennt, dass dieser Wert mit zunehmenden n immer kleiner wird und gegen 0 geht.
Damit wird klar, dass sich zunehmendem n das Intervall

$$4U.n < A.kreis < 4O.n$$

immer weiter zusammenzieht.

Als Ergebnis bleibt für die Kreisfläche n ein Grenzwert übrig, den man so schreibt:
$A = Pi * r^2$
Aus der Zerlegung in 5 Teilen folgt: **$2{,}636 * r^2 < A.kreis < 3{,}436*r^2$**
Also kann man hieraus zumindest schon festsellen: **$2{,}636 < Pi < 3{,}236$**

Ein genauer Wert ist:

$$Pi= 3{,}14159...$$

Diese Zahl tritt so vielfältig in Erscheinung, dass es sehr viele Methoden gibt, sie weit zu berrechnen. Da sie unendlich und nicht-periodisch ist, kennt man niemand ihren exakten Wert.
Solche Zahlen heißt man **irrationale Zahlen.**