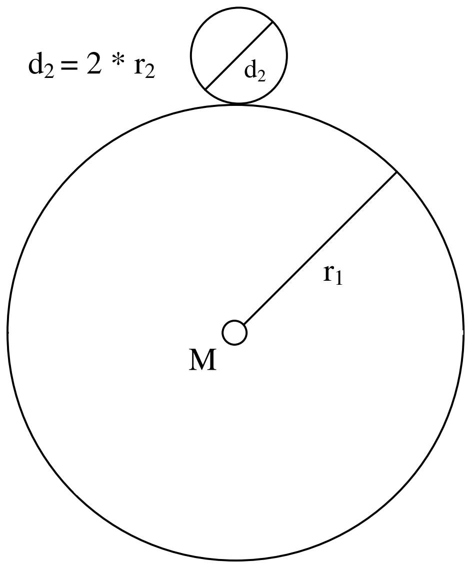
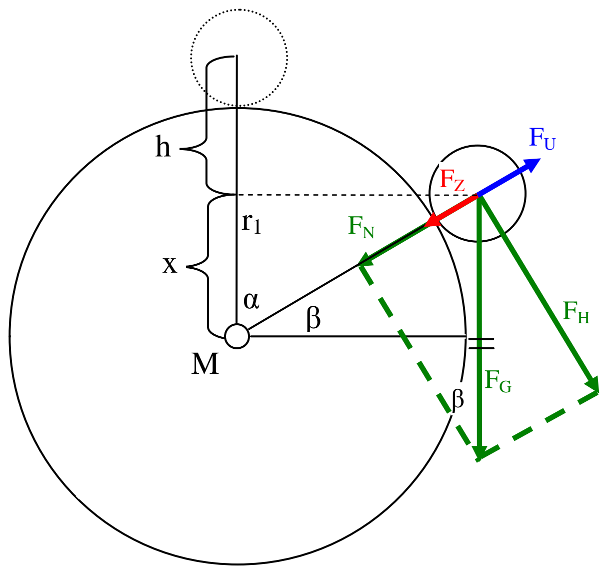
Physikalische Problemstellungen aus der Mechanik: Kugel auf Kugel

Auf einer großen Kugel K_1 mit dem Radius r_1 liegt eine kleine Kugel K_2 mit dem Radius r_2. Nun rollt die kleine Kugel herunter. Wann verliert sie den Kontakt zur großen Kugel? Reibungskräfte treten nicht auf, die Rollbewegung der kleinen Kugel kann vernachlässigt werden.



Im Grenzfall gilt:



Ansatz:

Im Grenzfall verliert K_2 den Kontakt zur Unterlage, F_U ist also 0. Dadurch gilt:

$$F_U = F_N - F_Z$$

$$F_U = 0 \Leftrightarrow F_Z = F_N$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \frac{v^2}{r_{Ges}} = m \cdot g \cdot \sin(\beta)$$

mit

$$\beta = 90° - \alpha$$

$$r_{Ges} = r_1 + r_2$$

Für v gilt der Energieerhaltungssatz (EES). Lageenergie wird in kinetische Energie umgewandelt.

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Für die Höhe h gilt:

$$h = (r_1 + r_2) - x$$

$$mit$$

$$x = \cos(\alpha) \cdot (r_1 + r_2)$$

$$\Rightarrow h = (r_1 + r_2) - \cos(\alpha) \cdot (r_1 + r_2)$$

$$\Leftrightarrow h = (r_1 + r_2) \cdot (1 - \cos(\alpha))$$

eingesetzt in die Gleichung von v:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (r_1 + r_2) \cdot (1 - \cos(\alpha))}$$

eingesetzt in die Kräftegleichung:

$$\cancel{m} \cdot \frac{2 \cdot \cancel{g} \cdot \cancel{(r_1 + r_2)} \cdot (1 - \cos(\alpha))}{\cancel{(r_1 + r_2)}} = \cancel{m} \cdot \cancel{g} \cdot \sin(90° - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (1 - \cos(\alpha)) = \sin(90° - \alpha) \Leftrightarrow \alpha \approx 48°$$

Beim Winkel $\alpha \approx 48°$ verlässt die kleine Kugel die große Kugel, unabhängig von den Größen der Kugeln (in Bezug auf Masse und Radius).

Anmerkung: In der Realität tritt zwischen K_1 und K_2 noch Reibung auf und die Rollbewegung von K_2 darf nicht vernachlässigt werden. Dafür ist ebenfalls Energie notwendig. Die Lageenergie wird also nicht vollständig in kinetische Energie umgewandelt. Dadurch wird der Grenzwinkel α größer.